

Université Paris 7 - Denis Diderot **2013-2014**

DM: Le défi ultime de Félicien BeauGarsNerf

Mode d'emploi :
Ce devoir a pour but de vous préparer à l'examen de fin d'année. Il peut/doit être réalisé en 3h qui serait le temps dont vous disposerez à l'examen. Essayez de vous mettre en condition : sans documents, sans calculatrice et lancez vous en 3h sans vous interrompre. Si au bout de ce temps vous n'êtes pas parvenus à terminer le devoir, reprenez les points qui vous posent problème et profitez-en pour réviser !

Le champion français de saut extrême, Félicien BeauGarsNerf veut battre le record de vitesse en chute libre, et donc le record d'altitude du saut. Il vous a choisi comme conseiller scientifique, vous qui connaissez non seulement le rayon de la Terre $R_T = 6400$ km et sa masse volumique moyenne $\rho_T = 5.515$ tonne/m^3 mais aussi la valeur de la constante de gravitation universelle $\mathcal{G} = 6.67\,10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}.



Figure 1: Gauche: le tenant du titre ($h = 38$ km). Droite: Félicien BeauGarsNerf.

1 Le costume de saut extrême de Félicien

1. Avec son beau costume, Félicien pèse 100 kg tout rond. Lorsqu'il se déplace par rapport à l'air à une vitesse $\vec{v}$, il est soumis à une force de frottement aérodynamique $\vec{f}$, qui ne dépend que de cette vitesse, de la masse volumique ρ de l'air, et de la surface S de Félicien vue d'un observateur situé le long de sa trajectoire et le regardant venir à lui (voir l'exemple sur la figure 1, droite).

$$\vec{f} = -\beta v \vec{v} = -\beta v^2 \frac{\vec{v}}{v}$$

   (a) Expliquez le signe moins dans cette expression.

   (b) Quelle est la dimension de β?

   (c) En utilisant l'analyse dimensionnelle, donnez l'expression de β, à un facteur numérique près que vous pourrez considérer comme étant de l'ordre de 1

2. Félicien souhaite franchir le mur du son en chute libre, c'est à dire atteindre une vitesse égale à celle du son, notée c.
   (a) En utilisant l'analyse dimensionnelle, donnez l'expression de c en fonction de la pression P et de la masse volumique ρ, à un facteur numérique près que vous pourrez considérer comme étant de l'ordre de 1.
   (b) Donnez l'ordre de grandeur de la masse volumique ρ de l'air près du sol, et de la surface S.
   (c) Donnez l'ordre de grandeur de la pression atmosphérique P au sol.
   (d) En déduire l'ordre de grandeur de la vitesse du son.
   (e) Donnez l'ordre de grandeur qu'aurait la force de frottement aérodynamique si Félicien atteignait la vitesse du son près du sol.
   (f) Comparez cette ordre de grandeur au poids de Félicien.
   (g) Pourquoi Félicien doit-il aller à haute altitude pour relever son défi?

2 Catapulte spatiale

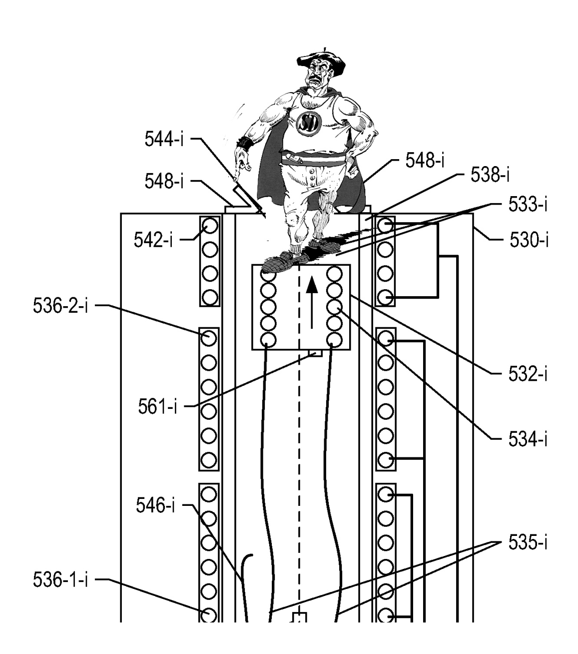


Figure 2: Schéma de la catapulte électromagnétique.

Félicien songe d'abord à se faire propulser dans l'espace par une catapulte électromagnétique. Il imagine un rail vertical de longueur $l = 500$ m, muni de bobines supraconductrices, qui accélère une plateforme munie d'une bobine d'aluminium, plateforme sur laquelle il monte. Les bobines sont disposées de sorte à fournir une accélération constante. En bout de course, la plateforme est retenue par deux filins d'acier.

1. Quelle est la relation entre l'accélération totale a subie par Félicien dans la catapulte et sa vitesse de lancement v_0.
2. Justifiez qu'en bout de course, Félicien quitte la plateforme et s'envole.
3. Félicien souhaite monter à une altitude h de l'ordre de 40 km.
   (a) Donnez l'expression de la force de gravitation exercée par la Terre sur Félicien, lorsque celui-ci se situe à une altitude h au dessus de la surface de la terre.
   (b) Comment se simplifie cette force de gravitation lorsque l'on considère que l'altitude h est petite devant le rayon terrestre.
   (c) On considère la trajectoire de Félicien dans le référentiel terrestre. Peut-on considérer ici que ce référentiel est Galiléen? Pourquoi?
   (d) En négligeant les frottements de l'air, déterminez la relation entre la vitesse v_0 et l'altitude h que devrait atteindre Félicien?
   (e) Calculez l'ordre de grandeur de v_0 pour une hauteur $h = 40$ km.
   (f) Calculez l'ordre de grandeur de l'accélération qu'il devrait subir dans la catapulte.
   (g) Le frottement de l'air est-il bien négligeable?

3 Drone

Félicien choisit de sauter d'un petit avion (d'un drone) sans vitesse initiale par rapport à celui-ci. Le drone vole à une altitude $H_i = 40\,\text{km}$.

1. Sur les conseils de Félicien, vous négligez à nouveau tout frottement dans l'air et vous choisissez le référentiel de l'avion en supposant que l'avion continue d'avancer à une vitesse horizontale et constante $\vec{v}_a$ par rapport au sol.
   (a) Justifiez que l'on puisse considérer le sol comme étant plat à l'échelle du problème.
   (b) Faites le bilan des forces appliquées à Félicien pendant sa chute et justifiez l'emploi du *Principe fondamental de la dynamique.*
   (c) Trouvez la vitesse atteinte au bout d'une hauteur H parcourue par Félicien.
2. On continue de négliger les frottements mais on effectue le calcul dans un référentiel lié au sol. Quelle est la vitesse atteinte par Félicien une fois qu'il est descendu d'une hauteur H ?
3. Félicien vous demande maintenant de considérer les frottements de l'air.
   (a) Justifiez que la vitesse horizontale de Félicien sera rapidement celle de l'air. On négligera par la suite cette composante de la vitesse.
   (b) Faites le bilan des forces appliquées à Félicien pendant sa chute.

(c) Trouvez l'expression littérale de la vitesse limite v_ℓ sans résoudre l'équation du mouvement.

(d) Quelle doit-être la masse volumique de l'atmosphère ρ pour que Félicien atteigne la vitesse du son? Vous donnerez une expression littérale puis un ordre de grandeur.

(e) Pour atteindre cette vitesse le plus facilement, Félicien doit-il chuter à plat ventre ou debout?

4. Vous allez maintenant trouver les variations temporelles de la vitesse de Félicien avant qu'il n'atteigne sa vitesse limite de chute.

   (a) Montrer que l'équation différentielle donnant ces variations peut se mettre sous la forme:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_\ell^2 - v^2}{\ell}$$

   (b) Donnez l'expression de ℓ.

   (c) Quelle est la dimension de ℓ?

   (d) Proposez une interprétation physique de ℓ.

   (e) Donnez un ordre de grandeur de ℓ.

   (f) Montrez que l'on peut se ramener à une équation différentielle de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\tau}(1 - w^2)$$

   Donnez l'expression et la dimension de τ.

   (g) Résolvez la nouvelle équation différentielle que vérifie la vitesse par la méthode de séparation des variables en remarquant que $\frac{1}{1-w^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+w} + \frac{1}{1-w}\right]$.

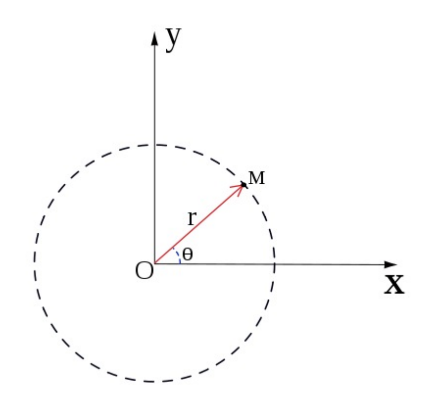
   (h) Tracez sommairement mais proprement la courbe représentant la vitesse en fonction du temps.

4 Satellisation de Félicien

1. Félicien veut maintenant être satellisé autour de la terre à une altitude h où les frottements soient négligeables

   (a) Si l'altitude reste constante par rapport à la Terre, supposée ronde, quelle serait la nature de la trajectoire de Félicien?

   (b) Pour un mouvement circulaire uniforme d'un point M à une vitesse de norme v constante, démontrer que la norme de l'accélération $a = \frac{v^2}{r}$ où r est le rayon de la trajectoire. On pourra pour cela effectuer la démonstration en utilisant les coordonnées cartésiennes (x, y) de M en les exprimant en fonction de θ tel qu'il est présenté sur le schéma suivant (On cherchera ensuite les expressions la norme et la vitesse de l'accélération pour faire apparaître la relation à démontrer ici).



(c) Quelle est la vitesse qu'il faudrait alors que Félicien ait s'il est en orbite à l'altitude h?

(d) Estimez cette vitesse pour $h = 100$ km.